

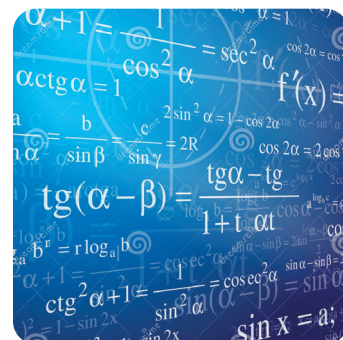
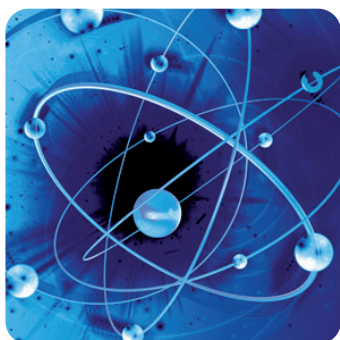


دفترچه پاسخ‌های تشریحی

آزمون آزمایشی ۱ تیر ۱۴۰۳ (مرحله ۲۲)

ویژه داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۳

گروه آزمایشی علوم ریاضی





داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۳
سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۲

پاسخ تشریحی آزمون ۱ تیر ۱۴۰۳

تذکرات مهم ↓

۲
۳

اسامی طراحان سؤال

پاسخ تشریحی درس های اختصاصی

➡ آزمون آزمایشی مرحله ۲۳ گزینه دو، در روز چهارشنبه ۶ تیر ۱۴۰۳ برگزار می گردد.

➡ داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون، آزمونک ها، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و ...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وب سایت گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir شوید.

➡ در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

➡ کارنامه های آزمون آزمایشی مرحله ۲۲ به صورت کامل، با فاصله زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیه اعلام شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir قرار می گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.



داوطلب گرامی، شما می توانید با اسکن تصویر بالا به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحه اینستاگرام مؤسسه گزینه دو وارد شوید.

 [gozine2.ir](https://www.instagram.com/gozine2.ir)

گروه ریاضی

طراحان

مدیر گروه: سید امیرمحمد سیدشاکری

حسابان	 حسین شفیع زاده • علی افضل زاده • مجید رفعتی
مسئول درس: سید امیرمحمد سیدشاکری	
دستیاران: حسین اسدزاده- عباس سعیدی	
هندسه	 سیدمحسن میراسلامی • علی نعمت
مسئول درس: سعید اکبرزاده	
دستیاران: هادی کاظم نژاد- فرهاد فرزانی	
ریاضیات گسسته	 علیرضا شریف خطیبی • امیدرضا پورحسینی
مسئول درس: سعید اکبرزاده	
دستیاران: هادی کاظم نژاد- فرهاد فرزانی	
ریاضی تجربی	 مهرداد کیوان • مهدی اکرمی • ایمان اردستانی
مسئول درس: ایمان اردستانی	
دستیار: پوپک مقدم	
ریاضی انسانی	 علی شهرابی فراهانی • وحید رباعی • حسین افسری
مسئول درس: سید امیرمحمد سیدشاکری	
دستیار: عباس سعیدی	

گروه علوم

مدیر گروه: محمدرضا محمدهاشمی

زیست شناسی	 محمد پازوکی • علی پناهی شایق • محمد شاملو
مسئول درس: امیر کبیری راد	
دستیاران: بتول خواجه پور- علی قلی زاده	
فیزیک	 علی نعیمی • بهمن شاهمرادی • احمد رضوانی
مسئول درس: منصور داودوندی	
دستیار: ساناز دریکوندی	
شیمی	 ماشاءالله سلیمانی • بهنام ابراهیم پور • مهداد ملاصالحی
مسئول درس: احمد عباسی	
دستیار: سیدحامد میرقادر	
زمین شناسی	 فرزانه رجایی • فرزانه صاعدی
مسئول درس: شکبیا کریمی	

گروه انسانی و علوم و معارف اسلامی

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

علوم و فنون ادبی	 ابوالفضل قاضی • علی عطری • محمدرضا لمسه چی
مسئول درس: محمدرضا پیرو	
دستیار: امیرحسین نیک دست	
جامعه شناسی	 آریتا بیدقی • فروغ تیموریان • محمدزمان کبیر • الهام میرزایی
مسئول درس: الهام رضایی	
روان شناسی	 سیمین زاهدی • سیده ضحی سکاکی • مهدی جاهدی
مسئول درس: سیده ضحی سکاکی	
زبان عربی	 مصطفی خاکبازان • کاظم غلامی • پدرام علیمردادی • الهه مسیح خواه
مسئول درس: پویا رضاداد	
دستیار: مائده خدایاری	
تاریخ، تاریخ اسلام و جغرافیا	 شهرام امامی • بهروز یحیی • فرناز نصیری • نگار مروّتی
مسئول درس: الناز گنج کار	
دستیاران: ثنا کاشیان- فاطمه وهابی	
فلسفه و منطق	 احمد خداداد حسینی • حمید سودیان طهرانی • حسین صادقی
مسئول درس: حمید سودیان طهرانی	
دستیاران: سعید رحیمیان- منصور کاظم بیگی	
اقتصاد	 حسین خاکساری • میترا چینی ساز • امیر محمدبیگی
مسئول درس: امیر محمدبیگی	
دستیار: محمدرضا مبارکی	

پاسخ تشریحی درس‌های اختصاصی آزمون ۱ تیر ۱۴۰۳ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

ریاضیات

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۲، فصل ۱)

۱- پاسخ: گزینه ۴

نکته: به‌طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، این روابط برقرار است:

$$S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

اگر S و P مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله باشند، شرایط زیر باید برقرار باشد تا معادله دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد:

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow 4(m+6)^2 - 4m(-3) > 0 \Rightarrow m^2 + 15m + 36 > 0 \Rightarrow m < -12 \text{ یا } m > -3$$

$$۲) S < 0 \Rightarrow \frac{2(m+6)}{m} < 0 \Rightarrow -6 < m < 0$$

$$۳) P > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m} > 0 \Rightarrow m < 0$$

از اشتراک سه شرط بالا، به رابطه $-3 < m < 0$ می‌رسیم.

بزرگ‌ترین مقدار صحیح m برابر -1 است و به‌ازای این مقدار داریم:

$$-x^2 - 10x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 10x + 3 = 0$$

مجموع مربعات ریشه‌های این معادله برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 100 - 6 = 94$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۱، فصل ۱)

۲- پاسخ: گزینه ۱

نکته: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \text{ یا } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

الگوی خطی همان دنباله حسابی است. با استفاده از نکته و اطلاعات سؤال داریم:

$$\begin{cases} S_{3n} = \frac{3n}{2}(a_1 + a_{3n}) \\ S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \end{cases} \Rightarrow \frac{2S_{3n}}{3} + \frac{2S_n}{1} = n(2a_1 + a_n + a_{3n})$$

چون $\frac{a_n + a_{3n}}{2} = a_{2n}$ و $S_{3n} = \frac{3n}{2}(a_1 + a_{3n})$ ، پس:

$$\frac{2}{3}S_{3n} + 2S_n = n(2a_1 + a_n + a_{3n}) = n(2a_1 + 2a_{2n}) = 2n(a_1 + a_{2n}) = 2S_{2n}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \times 588 + 2S_n = 2 \times 245 \Rightarrow S_n = 245 - 196 = 49$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (درس ۳، فصل ۴)

۳- پاسخ: گزینه ۳

با توجه به قدرمطلق مخرج کسر، دو حالت برای x در نظر می‌گیریم:

$$۱) x < 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1-x-1} \geq 8 \Rightarrow -\frac{x^2}{x} \geq 8 \xrightarrow{x \neq 0} -x \geq 8 \Rightarrow x \leq -8$$

پس بازه $(-\infty, -8]$ بخشی از مجموعه جواب است.

$$۲) x \geq 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x-1-1} \geq 8 \Rightarrow \frac{x^2}{x-2} - 8 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 8x + 16}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{x-2} \geq 0 \xrightarrow{(x-4)^2 \geq 0} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

بازه $(2, +\infty)$ نیز بخشی دیگر از مجموعه جواب است. در حالت کلی مجموعه جواب به‌صورت $(-\infty, -8] \cup (2, +\infty)$ است. بنابراین:

$a = -8$ و $b = 2$ و داریم:

$$a + b = -8 + 2 = -6$$

۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۳، فصل ۱)

نکته: برخی از معادلات که دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آن‌ها با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده باید در معادله اصلی آزمایش شوند؛ زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

نکته: به‌طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند. عبارت رادیکالی را در یک طرف تساوی تنها می‌کنیم و سپس دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{4x-5} = x-1 \xrightarrow{x \geq 1} 4x-5 = (x-1)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ \alpha\beta = 6 \end{cases}$$

حال معادله جدید را تشکیل می‌دهیم:

$$S = 1 + \frac{2}{\alpha} + 1 + \frac{2}{\beta} = 2 + \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = 2 + \frac{2 \times 6}{6} = 4 \quad P = (1 + \frac{2}{\alpha})(1 + \frac{2}{\beta}) = 1 + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{4}{\alpha\beta} = 1 + \frac{2 \times 6}{6} + \frac{4}{6} = \frac{11}{3}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + \frac{11}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 11 = 0$$

بنابراین:

تذکر: دقت شود که در صورت حل معادله اصلی به دو جواب بزرگ‌تر از ۱ می‌رسیم، پس هر دو قابل قبول‌اند.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۱)

۵- پاسخ: گزینه ۳

نکته: به‌طور کلی اگر در صفحه مختصات دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

نکته: اگر خطوط d و d' به ترتیب با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند، آنگاه $mm' = -1$ و برعکس.

راه حل اول: فرض کنید $A(a, 4a)$ باشد، شیب AB برابر $-\frac{1}{4}$ است. معادله آن را می‌نویسیم و مختصات نقطه B را مشخص می‌کنیم:

$$\text{معادله } AB: y - 4a = -\frac{1}{4}(x - a)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{17}{4}a \Rightarrow B(0, \frac{17}{4}a)$$

حال طول اضلاع OA و AB را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} OA = \sqrt{a^2 + (4a)^2} = a\sqrt{17} \\ AB = \sqrt{a^2 + (\frac{17}{4}a - 4a)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{16}a^2} = \frac{a\sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

مطابق فرض سؤال، مساحت این مستطیل برابر ۳۶ است، پس:

$$S = OA \times AB \Rightarrow a\sqrt{17} \times \frac{a\sqrt{17}}{4} = 36 \Rightarrow a = \frac{12}{\sqrt{17}}$$

حال داریم:

$$\text{محیط} = 2(a\sqrt{17} + \frac{a\sqrt{17}}{4}) = \frac{5}{2}a\sqrt{17} = \frac{5}{2} \times \frac{12}{\sqrt{17}} \times \sqrt{17} = 30$$

راه حل دوم: شیب خط OA برابر ۴ است، پس $OA = 4AB$ و داریم:

$$S = OA \times AB = 4AB^2 = 36 \Rightarrow AB = 3 \Rightarrow OA = 12 \Rightarrow \text{محیط} = 30$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس‌های ۳ و ۴، فصل ۲)

۶- پاسخ: گزینه ۱

نکته: برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\text{نکته: } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

فرض کنید $f(x) = ax + b$ باشد:

$$f(x+2) = a(x+2) + b = ax + 2a + b$$

$$f \circ f(x+2) = a(ax + 2a + b) + b = a^2x + 2a^2 + ab + b$$

به شرطی تابع به‌دست آمده با تابع همانی ($y = x$) برابر است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ 2a^2 + ab + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow 2 + b + b = 0 \Rightarrow b = -1 \\ a = -1 \Rightarrow 2 - b + b = 0 \Rightarrow \text{تناقض} \end{cases}$$

پس $f(x) = x - 1$ و در نتیجه $f^{-1}(x) = x + 1$ است، حال داریم:

$$f(2x) < f^{-1}(x) \Rightarrow 2x - 1 < x + 1 \Rightarrow x < 2$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس های ۳ و ۴، فصل ۲)

۷- پاسخ: گزینه ۱

نکته: اگر f یک تابع یک به یک باشد، برای به دست آوردن نمودار تابع f^{-1} ، کافی است قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) به دست آوریم.

نکته: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

ابتدا تابع $f \circ f(x)$ را تشکیل می دهیم:

$$f \circ f(x) = \frac{2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)+1}{\frac{2x+1}{x-1}-1} = \frac{4x+2+x-1}{2x+1-x+1} = \frac{5x+1}{x+2}$$

طبق نکته اول می توان نتیجه گرفت هر تابعی (به جز به فرم $xy = k$) اگر وارونش را قطع کند، آن را روی خط $y = x$ قطع می کند، پس برای یافتن نقاط برخورد تابع $f \circ f$ با وارون خود، کافی است نمودار $f \circ f$ را با نیمساز $y = x$ تقاطع دهیم، داریم:

$$\frac{5x+1}{x+2} = x \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 3 \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{3}{-1} = -3$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۳، فصل ۳)

۸- پاسخ: گزینه ۲

نکته: $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

$x = \alpha$ را در معادله داده شده جای گذاری می کنیم، داریم:

$$x = \alpha \Rightarrow \log_7 \alpha + \log_3 \alpha = 1$$

دو طرف تساوی را بر $\log_7 \alpha \times \log_3 \alpha$ تقسیم می کنیم:

$$\frac{\log_7 \alpha}{\log_7 \alpha \log_3 \alpha} + \frac{\log_3 \alpha}{\log_7 \alpha \log_3 \alpha} = \frac{1}{\log_7 \alpha \log_3 \alpha} \Rightarrow \log_\alpha 7 + \log_\alpha 3 = \log_\alpha 7 \log_\alpha 3$$

$$\Rightarrow \log_\alpha 6 = \log_\alpha 7 \log_\alpha 3$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۱)

۹- پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y است.

نکته: به شرطی تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با وارون خود برابر است که $a = -d$ باشد. پس با توجه به نکته، به شرطی $f = f^{-1}$ است که $a = -1$ باشد. حال داریم:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1} \xrightarrow{\text{قرینه}} g(x) = f(-x) = \frac{-x+2}{-x-1} = \frac{x-2}{x+1}$$

حال $g(\sqrt[3]{2})$ را به دست می آوریم:

$$g(\sqrt[3]{2}) = \frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{(\sqrt[3]{2}-2)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{2-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}-2}{2+1} = \frac{3(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})}{3} = \sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$$

پس $n=2$ و $m=4$ و $n+m=6$ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

۱۰- پاسخ: گزینه ۲

نکته: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

چون θ حاده است، پس $\sin 2\theta$ مثبت است و در نتیجه $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$ است، حال داریم:

$$\tan^2\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin^2\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{2}(1-\cos(2\theta + \frac{3\pi}{2}))}{\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta + \frac{3\pi}{2}))} = \frac{1-\sin 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}} = \frac{1}{9}$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۲)

نکته: توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

با توجه به نکته، داریم:

$$\begin{cases} \max = a + |b| = 5 \\ \min = a - |b| = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ |b| = 3 \end{cases}$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow a - \frac{b\sqrt{2}}{2} > 0 \Rightarrow b < 2\sqrt{2} \Rightarrow b = -3 \Rightarrow f(x) = 2 + 3 \sin(-3x + \frac{\pi}{4})$$

تابع $y = [f(x)]$ در نقطه‌ای حد دارد ولی پیوسته نیست که f ماکزیمم باشد و چون ضریب سینوس مثبت است، پس کافی است $\sin(-3x + \frac{\pi}{4})$ برابر ۱ باشد، داریم:

$$-3x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow -3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{-2k\pi}{3} = \frac{\pi}{12} \xrightarrow{k=-1} x = \frac{7\pi}{12}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

۱۲- پاسخ: گزینه ۱

$$\text{نکته: } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

طبق نکته داریم:

$$\sin 2x + \cos 4x = 1 \Rightarrow \sin 2x + 1 - 2\sin^2 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x - 2\sin^2 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x(1 - 2\sin 2x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \text{مجموع} = \pi$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۵)

۱۳- پاسخ: گزینه ۳

حد ابهام $\frac{0}{0}$ دارد. برای رفع ابهام، صورت و مخرج را در مزدوج عبارت زیر رادیکال ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}}{(x-1)(x+1)} \times \frac{\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-2x+x^2}}{(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}})(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}})(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}})(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}})(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس‌های ۱ و ۲، فصل ۳)

۱۴- پاسخ: گزینه ۴

نکته: خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

نکته: خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.

خط $y = 2$ مجانب افقی است، پس نمودار f از نقطه $(-2, 2)$ عبور می‌کند:

$$f(-2) = 2 \Rightarrow \frac{8-2-12}{4-4+a} = 2 \Rightarrow \frac{-6}{a} = 2 \Rightarrow a = -3$$

حال داریم:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{2x^2 + x - 12}{(x+3)(x-1)}$$

مجانب قائم مثبت تابع $x = 1$ است، پس داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \frac{-9}{+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \frac{-9}{-} = +\infty \end{aligned}$$

نکته (تعریف مشتق): مشتق تابع f در $x = \alpha$ برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

نکته: $(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$

چون f در $x = 2$ پیوسته است به شرطی حاصل حد وجود دارد که $f(2) = 2$ باشد، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - 2)(f'(x) + 2f(x) + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) + 2f(x) + 4}{x + 2} = \frac{12}{4} f'(2) = 3f'(2) \Rightarrow 2f'(2) = \frac{3}{2} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$$

اکنون عبارت خواسته شده برابر است با:

$$(g \circ f)'(2) = f'(2) g'(f(2)) = f'(2) g'(2)$$

حال از تابع g مشتق می‌گیریم تا $g'(2)$ را محاسبه کنیم:

$$g'(x) = 1 + \frac{4}{3\sqrt[3]{16x^2}} \Rightarrow g'(2) = 1 + \frac{4}{12} = \frac{4}{3}$$

بنابراین:

$$(g \circ f)'(2) = f'(2) \cdot g'(2) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

نکته: اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

با توجه به اینکه در یک همسایگی $x = -2$ مقدار x منفی است، پس $|x| = -x$ است، داریم:

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + ax + b - x & x < -2 \\ 3x^2 + a - x & x \geq -2 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + a - 1 & x < -2 \\ 6x - 1 & x \geq -2 \end{cases}$$

شرط پیوستگی: $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = g(-2) \Rightarrow -6 - 2a + b = 14 + a \Rightarrow -3a + b = 20$

شرط برابری مشتق چپ و راست: $g'_-(-2) = g'_+(-2) \Rightarrow 11 + a = -13 \Rightarrow a = -24 \Rightarrow b = -52 \Rightarrow a - b = 28$

نکته: برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق ابتدا نقاط بحرانی را مشخص می‌کنیم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آن‌ها اتفاق می‌افتد نقاط ماکزیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط، مقدار ماکزیمم مطلق تابع است. همچنین در بین نقاط مذکور نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آن‌ها اتفاق می‌افتد نقاط مینیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار مینیمم مطلق تابع است. ابتدا مشتق f را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{a}{\sqrt{ax+2}} - \frac{a}{\sqrt{2ax+1}}$$

نقاط بحرانی این تابع ریشه‌های $f'(x) = 0$ و ریشه‌های مخرج کسرها هستند. ابتدا به‌ازای ریشه‌های مخرج مقدار f را به‌دست می‌آوریم:

$$x = -\frac{2}{a} \Rightarrow f\left(-\frac{2}{a}\right) \text{ تعریف نشده}$$

$$x = -\frac{1}{2a} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2a}\right) = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$$

حال $f'(x)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = \frac{a}{\sqrt{ax+2}} - \frac{a}{\sqrt{2ax+1}} = 0 \Rightarrow \sqrt{ax+2} = \sqrt{2ax+1} \Rightarrow ax+2 = 2ax+1 \Rightarrow x = \frac{1}{a}$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

پس $f\left(\frac{1}{a}\right) = \sqrt{3}$ مینیمم است و در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۳، فصل ۵)

۱۸- پاسخ: گزینه ۱

نکته: تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c \neq 0$ است یک تابع هموگرافیک می‌نامیم.

نکته: در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، خط $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی و خط $x = -\frac{d}{c}$ مجانب قائم آن است.

در تابع درجه سوم f ، $x=0$ ریشه مضاعف و $x=3$ ریشه ساده است، پس $f(x) = kx^2(x-3)$ است. این تابع در نقطه $x=0$ و در نقطه دیگری که با تابع هموگرافیک متقاطع شده، دارای اکسترمم نسبی است. طول آن را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = k(3x^2 - 6x) \xrightarrow{f'=0} x=0, x=2$$

پس طول نقطه ماکزیمم نسبی f برابر ۲ است.

در تابع هموگرافیک g ، مجانب قائم $x=0$ و مجانب افقی $y=-4$ است، پس:

$$g(x) = \frac{-4x+a}{x} \Rightarrow g(2) = 0 \Rightarrow a = 12 \Rightarrow g(x) = \frac{-4x+12}{x}$$

در نقطه $x=2$ نمودار دو تابع متقاطع‌اند، پس:

$$f(2) = g(2) \Rightarrow -4k = 2 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

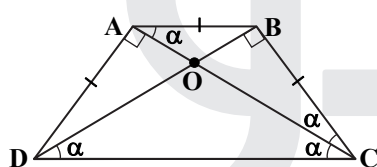
بنابراین:

$$f'(x) = k(3x^2 - 6x) \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{2}(12 - 12) = 0$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۱، فصل ۳ و درس ۲، فصل ۱)

۱۹- پاسخ: گزینه ۴

با در نظر گرفتن شکل مقابل و با توجه به فرض سؤال داریم:



$$AB = BC = AD \Rightarrow \hat{BAC} = \hat{ACB} = \alpha$$

$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{BAC} = \hat{ACD} = \alpha$$

$$\triangle AOD \cong \triangle BOC \Rightarrow OD = OC \Rightarrow \hat{ODC} = \hat{OCD} = \alpha$$

$$\triangle BDC: \alpha + 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \hat{BCD} = 2\alpha = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (درس ۳، فصل ۲)

۲۰- پاسخ: گزینه ۲

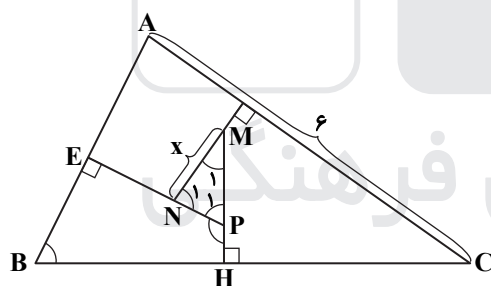
در چهارضلعی BEPH، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{EPH} + \hat{B} &= 180^\circ \\ \hat{EPH} + \hat{P}_1 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{B}$$

به همین ترتیب داریم:

$$\hat{M}_1 = \hat{C}, \hat{N}_1 = \hat{A}$$

پس دو مثلث ABC و MNP متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با توان دوم نسبت تشابه است.



$$\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{MN}{AC}\right)^2 = \left(\frac{x}{6}\right)^2 = \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

چون مساحت مثلث MNP یک چهارم مساحت مثلث ABC است، پس مجموع مساحت سه تا چهارضلعی، $\frac{3}{4}$ مساحت مثلث ABC می‌باشد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۴)

۲۱- پاسخ: گزینه ۳

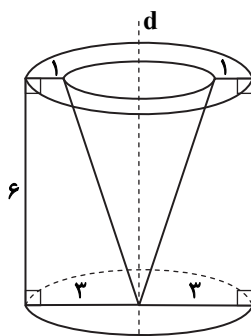
باید مطابق شکل، حجم یک مخروط را از حجم یک استوانه کم کنیم:

$$r_{\text{مخروط}} = 3 - 1 = 2$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \times 2^2 \times 6 = 8\pi$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi R^2 h = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi$$

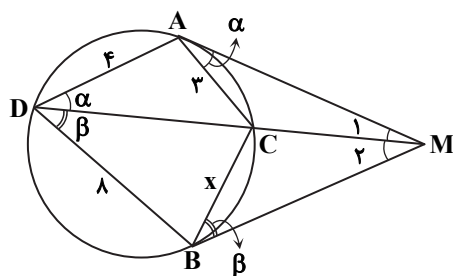
$$\text{حجم شکل حاصل} = 54\pi - 8\pi = 46\pi$$



▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (درس ۱، فصل ۱)

۲۲- پاسخ: گزینه ۳

مثلث‌های MAC و MAD متشابه‌اند؛ زیرا:



$$\left. \begin{aligned} \widehat{ADM} &= \frac{\widehat{AC}}{2} \text{ محاطی} \\ \widehat{MAC} &= \frac{\widehat{AC}}{2} \text{ ظلی} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{MAC} = \alpha \Rightarrow \widehat{MAC} \sim \widehat{MAD}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{MC}{MA} \quad (I)$$

مثلث‌های MBC و MDB نیز متشابه‌اند؛ زیرا:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{MDB} &= \frac{\widehat{CB}}{2} \text{ محاطی} \\ \widehat{MBC} &= \frac{\widehat{CB}}{2} \text{ ظلی} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{MDB} = \widehat{MBC} = \beta \Rightarrow \widehat{MCB} \sim \widehat{MDB} \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{MC}{MB} \quad (II)$$

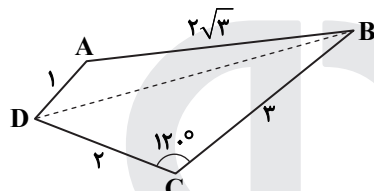
طول مماس‌های MA و MB برابرند. پس طبق (I) و (II) داریم:

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{8} \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (درس ۲، فصل ۳)

۲۳- پاسخ: گزینه ۳

بر طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث BDC داریم:



$$BD^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 3 \cos 120^\circ = 9 + 4 + 6 = 19$$

حال قضیه کسینوس‌ها را در مثلث ABD نوشته و داریم:

$$BD^2 = 1^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 1 \times 2\sqrt{3} \cos \hat{A} \Rightarrow 19 = 1 + 12 - 4\sqrt{3} \cos \hat{A} \Rightarrow 13 - 4\sqrt{3} \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-6}{4\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 150^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{C} = \frac{150}{120} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (درس ۱، فصل ۱)

۲۴- پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -x+1 & -2x-1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -x^2 + x - 4x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5 > 0 \rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

۲۵- پاسخ: گزینه ۴

ابتدا $|A|$ را یافته و ماتریس A را مشخص می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2|A|^2 & |A| \\ |A|^2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2|A|^2 - |A|^3 \xrightarrow{+|A|} 1 = 2|A| - |A|^2 \Rightarrow |A|^2 - 2|A| + 1 = 0 \Rightarrow (|A| - 1)^2 = 0$$

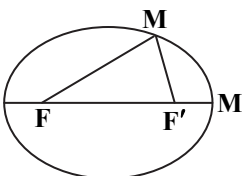
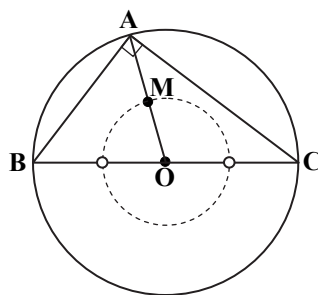
$$\Rightarrow |A| = 1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی می‌باشد، پس معادلات دستگاه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 2x + y = c \\ x + y = c' \end{cases}$$

مجموع جواب‌های دستگاه، در معادله دوم ($x + y = c'$) آن دیده می‌شود، پس باید از بین گزینه‌ها، ماتریس $B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ را طوری بیابیم که

$c' = 5$ باشد که فقط گزینه ۴ به این صورت است.



۲۶- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (درس ۱، فصل ۲)

چون وتر BC ثابت است، پس مکان رأس A دایره‌ای به قطر BC است. نقطه M وسط میانه وارد بر وتر است.

$$MO = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}BC\right) = \frac{1}{4}BC$$

فاصله M از وسط BC همواره ثابت است، ضمناً وتر BC هم ثابت است، پس نقطه O (وسط BC) نیز ثابت است، پس مکان M دایره‌ای به مرکز وسط BC و شعاع $\frac{BC}{4}$ است

که دارای دو نقطه توخالی است؛ بنابراین مکان نقطه M دو نیم‌دایره است.

۲۷- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۳، فصل ۲)

طبق نامساوی مثلثی، در مثلث MFF' داریم:

$$MF - MF' \leq FF'$$

حالت تساوی مربوط به قرار گرفتن M روی رأس کانونی است که در این حالت داریم:

$$MF - MF' = FF' = 2c$$

پس:

$$x = 2c$$

در بیضی همواره $MF + MF' = 2a$ است، پس کمترین مقدار $MF + MF'$ نیز همان $2a$ می‌باشد؛ لذا $y = 2a$ و خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{x}{y} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = e$$

۲۸- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۳، فصل ۲)

با توجه به شکل مقابل، در مثلث AFH' داریم:

$$\triangle AFH': \begin{cases} \tan 60^\circ = \frac{AH'}{FH'} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AH'}{1} \Rightarrow AH' = \sqrt{3} \\ \sin 60^\circ = \frac{AH'}{AF} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{AF} \Rightarrow AF = 2 \end{cases}$$

بر طبق تعریف سهمی داریم:

$$AK = AF = 2$$

اندازه FH برابر است با:

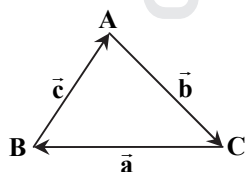
$$FH = HH' - FH' = AK - FH' = 2 - 1 = 1$$

$$S_{AFHK} = \left(\frac{AK + FH}{2}\right)AH' = \left(\frac{2+1}{2}\right) \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

۲۹- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۳)

بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را مطابق شکل با جهت‌های نشان داده‌شده فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{O}$$



حاصل عبارتی که باید محاسبه کنیم را برحسب این سه بردار می‌نویسیم:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{c} \cdot (-\vec{b}) + (-\vec{c}) \cdot (\vec{a}) + \vec{b} \cdot (-\vec{a}) = -(\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a})$$

حال عبارت $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$$

چون $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{O}$ ، داریم:

$$0 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2)$$

چون $|\vec{a}| = a$ ، $|\vec{b}| = b$ و $|\vec{c}| = c$ ، پس حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$-(\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a}) = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

۳۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (درس ۳، فصل ۶)

از آنجایی که رقم یکان باید عددی زوج باشد، حالت‌های زیر می‌تواند برای رقم یکان وجود داشته باشد:

(۱) صفر در یکان باشد: برای دهگان و صدگان بایستی دو رقم از میان ۹ رقم ۱ تا ۹ انتخاب کرده و عدد بزرگ‌تر را در صدگان قرار دهیم.

$$\binom{9}{2} = 36$$

(۲) ۲ در یکان باشد: برای دهگان و صدگان بایستی دو رقم از میان ۷ رقم ۳ تا ۹ انتخاب کرده و عدد بزرگ‌تر را در صدگان قرار دهیم.

$$\binom{7}{2} = 21$$

(۳) ۴ در یکان باشد: برای دهگان و صدگان بایستی دو رقم از میان ۵ رقم ۵ تا ۹ انتخاب کرده و عدد بزرگ‌تر را در صدگان قرار دهیم.

$$\binom{5}{2} = 10$$

(۴) ۶ در یکان باشد: برای دهگان و صدگان بایستی دو رقم از میان ۳ رقم ۷ تا ۹ انتخاب کرده و عدد بزرگ‌تر را در صدگان قرار دهیم.

$$\binom{3}{2} = 3$$

با توجه به اینکه باید صدگان از دهگان بزرگ‌تر باشد، پس رقم یکان نمی‌تواند ۸ باشد. پس تعداد کل اعداد با شرایط مسئله برابر است با:

$$36 + 21 + 10 + 3 = 70$$

۳۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۱)

از رابطه $A \times B \subseteq C \times D$ نتیجه می‌شود: $A \subseteq C$ و $B \subseteq D$

$$B \subseteq D \Rightarrow \begin{cases} B - D = \emptyset \\ B \cap D = B \end{cases} \text{ و } A \subseteq C \Rightarrow \begin{cases} A \cup C = C \\ A \cap C = A \end{cases}$$

پس خواهیم داشت:

$$[(A \cup C) \cap (A - C')] \cup [(B - D) \cup (B \cap D)] = (C \cap A) \cup (\emptyset \cup B) = A \cup B$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۳۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (درس ۱، فصل ۲) و ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۳)

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با: $n(S) = 6!$

اگر پیشامد آنکه دو حرف a و e کنار هم باشند را A و پیشامد آنکه دو حرف r و s کنار هم باشند را B در نظر بگیریم، بایستی مقدار

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

پس داریم:

$$A : cr \boxed{ea} ms : n(A) = 2! \times 5!$$

$$A \cap B : c \boxed{rs} \boxed{ea} m : n(A \cap B) = 2! \times 2! \times 4!$$

$$n(A - B) = 2! \times 5! - 2! \times 2! \times 4! = 2! \times 5 \times 4! - 2 \times 2 \times 4! = 2! \times 4! (5 - 2) = 2 \times 4! \times 3 = 6 \times 4!$$

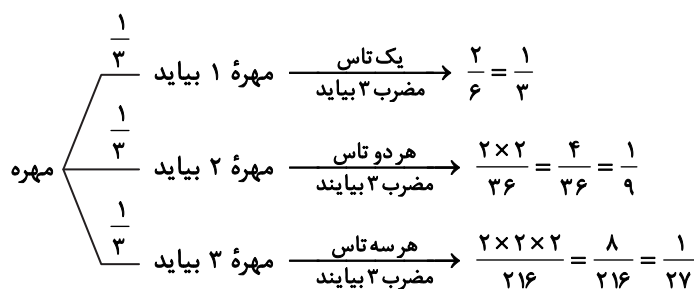
$$P(A - B) = \frac{n(A - B)}{n(S)} = \frac{6 \times 4!}{6!} = \frac{6 \times 4!}{6 \times 5 \times 4!} = \frac{1}{5}$$

پس احتمال مورد نظر برابر است با:

۳۳- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۲)

ابتدا مسئله را به کمک نمودار درختی، مدل سازی می‌کنیم:



حال اگر پیشامد انتخاب مهره ۱ را B_1 ، پیشامد انتخاب مهره ۲ را B_2 ، پیشامد انتخاب مهره ۳ را B_3 و پیشامد اینکه همه برآمدهای

تاس‌ها مضرب ۳ باشند، را A در نظر بگیریم، به کمک قاعده بیز، خواهیم داشت:

$$P(B_3 | A) = \frac{P(B_3) \times P(A | B_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{27}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{27}} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{27}}{\frac{1}{3} (\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27})} = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{13}{27}} = \frac{1}{13}$$

۳۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (درس ۲، فصل ۴)

می‌دانیم طول بازه اطمینان ۹۵ درصدی بر آورد میانگین برابر $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ است. پس کفایت مقدار انحراف معیار داده‌ها را به دست آوریم:

$$\bar{x} = \frac{4 \times 10 + 12 \times 12 + 2 \times 14 + 6 \times 16 + 7 \times 18}{31} = \frac{40 + 144 + 28 + 96 + 126}{31} = \frac{434}{31} = 14$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4(10-14)^2 + 12(12-14)^2 + 2(14-14)^2 + 6(16-14)^2 + 7(18-14)^2}{31}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 \times 16 + 12 \times 4 + 0 + 6 \times 4 + 7 \times 16}{31}} = \sqrt{\frac{248}{31}} = \sqrt{8}$$

طول بازه اطمینان مطابق با فرض مسئله برابر $\sqrt{\frac{32}{5}}$ است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{4\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{32}{5}} \Rightarrow \frac{4\sqrt{8}}{\sqrt{n}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{n} = 2\sqrt{5} \Rightarrow n = 20$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۱)

۳۵- پاسخ: گزینه ۳

با توجه به تعریف ب.م.م دو عدد صحیح و به کمک ویژگی‌های عاقد کردن، داریم:

$$(a-4, a^3 + 5a^2 - 4) = d \Rightarrow \begin{cases} d | a-4 \\ d | a^3 + 5a^2 - 4 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} d | a-4 \xrightarrow{\times a^2} d | a^3 - 4a^2 \\ d | a^3 + 5a^2 - 4 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} d | 9a^2 - 4 \quad (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} d | a-4 \xrightarrow{\times 9a} d | 9a^2 - 36a \\ (*) : d | 9a^2 - 4 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} d | 36a - 4 \quad (**)$$

$$\left. \begin{array}{l} d | a-4 \xrightarrow{\times 36} d | 36a - 144 \\ (**): d | 36a - 4 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} d | 140 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 4 \text{ یا } 5 \text{ یا } 7 \text{ یا } 10 \text{ یا } 14 \text{ یا } 20 \text{ یا } 28 \text{ یا } 35 \text{ یا } 49 \text{ یا } 70 \text{ یا } 140$$

با توجه به اینکه $d \neq 1$ عددی یک‌رقمی و فرد است، پس:

$$d = 5 \text{ یا } d = 7$$

حال باقی‌مانده تقسیم $d^2 - 3d$ بر ۶ را به دست می‌آوریم:

$$d = 5 \Rightarrow d^2 - 3d = 25 - 15 = 10 \Rightarrow \text{باقی‌مانده } 10 \text{ بر } 6 = 4$$

$$d = 7 \Rightarrow d^2 - 3d = 49 - 21 = 28 \Rightarrow \text{باقی‌مانده } 28 \text{ بر } 6 = 4$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۳، فصل ۱)

۳۶- پاسخ: گزینه ۲

معادله سیاله $113 = 9x + 25y$ را به معادله هم‌نهمی بر حسب x تبدیل کرده و معادله را حل می‌کنیم:

$$9x \equiv 113 \pmod{25} \Rightarrow 9x \equiv 113 - 2 \times 25 \pmod{25} \Rightarrow 9x \equiv 63 \pmod{25} \xrightarrow{\div 9} x \equiv 7 \pmod{(9,25)=1}$$

و به کمک ویژگی کاهش پیمانه در هم‌نهمی، داریم:

$$x \equiv 7 \pmod{25} \Rightarrow x \equiv 7 - 5 \pmod{25} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{25}$$

یعنی باقی‌مانده x برابر ۲ است، پس $r = 2$.

اینک بایستی باقی‌مانده تقسیم 47^{47} بر ۱۱ را حساب کنیم. پس داریم:

$$47 \equiv 47 - 4 \times 11 \Rightarrow 47 \equiv 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} 47^2 \equiv 9 \equiv -2 \xrightarrow{\text{توان } 5} 47^{10} \equiv -32 \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان } 4} 47^{40} \equiv 1 \quad (1)$$

$$47^2 \equiv -2 \xrightarrow{\text{توان } 3} 47^6 \equiv -8 \equiv 3 \xrightarrow{\text{ضرب می‌کنیم}} 47^7 \equiv 9 \quad (2)$$

با ضرب طرفین روابط (۱) و (۲) در هم، خواهیم داشت:

$$47^{47} \equiv 9$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

ابتدا عدد احاطه‌گری گراف را به‌دست می‌آوریم:

$$n = 6, \Delta = 3$$

$$\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil \Rightarrow \gamma \geq \left\lceil \frac{6}{3 + 1} \right\rceil = 2 \Rightarrow \gamma \geq 2$$

و از آنجایی که مجموعه $\{a, d\}$ احاطه‌گر است پس $\gamma = 2$ است.

از طرفی مجموعه‌های زیر، مجموعه احاطه‌گر مینیمم هستند:

$$\{a, d\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{f, e\}, \{f, d\}, \{f, c\}$$

یعنی ۹ مجموعه احاطه‌گر مینیمم وجود دارد.

تذکر: برای نوشتن γ - مجموعه، باید یکی از ۳ رأس a, b, f و یکی از ۳ رأس c, e, d را انتخاب کنیم، پس طبق اصل ضرب، داریم:

$$3 \times 3 = 9 \text{ تعداد } \gamma\text{-مجموعه}$$

با استفاده از مفهوم فضای نمونه‌ای کاهش‌یافته در محاسبه احتمال شرطی «پیشامد آنکه به هر نفر حداقل یک خودکار برسد» را فضای

نمونه‌ای کاهش‌یافته در نظر گرفته و احتمال آن را حساب می‌کنیم که «به هر نفر حداقل ۲ خودکار برسد». پس داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12, x_i \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ n = 12 \end{cases} : n(S) = \binom{n-1}{k-1} = \binom{12-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12, x_i \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ n = 12 \end{cases} : n(A) = \binom{n+k-1-(2+2+2)}{k-1} = \binom{12+3-1-6}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{55}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

ابتدا دو سوپرمارکتی که قرار است هیچ‌کس از آن‌ها خرید نکند را انتخاب می‌کنیم، که تعداد حالات این کار برابر است با:

$$\binom{5}{2} = 10$$

اینک قرار است ۴ نفر از ۳ سوپرمارکت باقی‌مانده خرید کنند، پس تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی را حساب می‌کنیم:

$$3^4 - 3 \times 2^4 + 3 = 81 - 3 \times 16 + 3 = 36$$

و در نهایت به کمک اصل ضرب، تعداد کل حالات برابر است با:

$$10 \times 36 = 360$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به تعمیم اصل لانه کبوتری، داریم:

$$\left. \begin{aligned} k+1=4 &\Rightarrow k=3 \\ \text{تعداد لانه‌ها} &= 32 \times 32 = 1024 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = kn + 1 = (3 \times 1024) + 1 = 3073$$

حرف انتهایی
↓
حرف ابتدایی

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

فیزیک

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)

۴۱- پاسخ: گزینه ۴

$$60 \cdot \frac{\mu\text{J}}{\text{cm}^2 \cdot \text{min}} = \frac{60 \cdot (10^{-6})}{(10^{-4})(60)} \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} = 10^{-2}$$

درستی گزاره «الف»:

درستی گزاره «ب»: طول، جرم، دما، زمان، شدت جریان الکتریکی، شدت روشنایی و مقدار ماده، کمیت‌های اصلی هستند.

درستی گزاره «پ»: یکای نجومی میانگین فاصله زمین تا خورشید است و سال نوری مسافتی است که نور در خلأ در مدت یک سال طی می‌کند.

$$P = \frac{W \rightarrow J}{t \rightarrow s} \Rightarrow \frac{N \cdot m}{s} = \frac{\frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}}{s} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^3}$$

درستی گزاره «ت»:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۴۲- پاسخ: گزینه ۱

$P' = 125 \text{ cmHg}$: فشار حاصل از مایع در عمق ۳ متری $\Rightarrow 200 = P_0 + P'_{\text{مایع}}$: فشار کل در عمق ۳ متری

$P = P_0 + 3P' = 75 + 375 = 450 \text{ cmHg}$: فشار در عمق ۹ متری $\Rightarrow P = 3P' = 375 \text{ cmHg}$: فشار حاصل از مایع در عمق ۹ متری

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

۴۳- پاسخ: گزینه ۲

نیروی مغناطیسی از طرف میدان مغناطیسی آهن‌ریا به سیم حامل جریان، طبق قانون دست راست، درون سیم است و طبق قانون سوم نیوتون، واکنش آن یعنی نیرویی که سیم به آهن‌ریا وارد می‌کند، برون سیم است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۴- پاسخ: گزینه ۲

تندی متحرک در بازه‌های زمانی $(t = 0 \text{ تا } t = 1 \text{ s})$ و $(t = 1 \text{ تا } t = 7 \text{ s})$ به طور مرتب در حال کاهش است و بنابراین حرکت متحرک در این بازه‌ها کندشونده است؛ پس:

$$\Delta t_{\text{کندشونده}} = (1-0) + (7-1) = 8 - t_m$$

$$\Rightarrow 3 = 8 - t_m \Rightarrow t_m = 5 \text{ s}$$

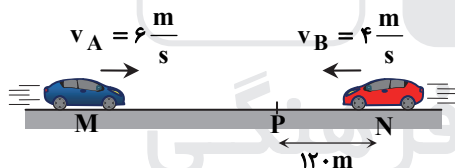
اندازه شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = t_m$ برابر است با:

$$a_{av} = \frac{v_m - v_0}{t_m - t_0} = \frac{6 - (-4)}{5 - 0} = \frac{10}{5} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۵- پاسخ: گزینه ۳

مطابق شکل زیر و با فرض اینکه متحرک‌های A و B در لحظه $t = 0$ به ترتیب از نقاط M و N شروع به حرکت کنند و در لحظه t در نقطه P به یکدیگر برسند، داریم:



$$\overline{NP} = v_B t = 4t \Rightarrow 120 = 4t \Rightarrow t = 30 \text{ s}$$

$$\overline{MP} = v_A t = 6t = 6 \times 30 = 180 \text{ m}$$

بنابراین مدت زمان لازم برای آنکه متحرک B از نقطه P به نقطه M برسد، برابر است با:

$$\overline{MP} = v_B \cdot \Delta t \Rightarrow 180 = 4 \Delta t \Rightarrow \Delta t = 45 \text{ s}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۶- پاسخ: گزینه ۲

در ابتدا سرعت متحرک را در لحظات $t = 2 \text{ s}$ ، $t = 4 \text{ s}$ و $t = 6 \text{ s}$ به دست می‌آوریم. چون حرکت، شتابدار ثابت است، پس:



$$v = at + v_0$$

$$t = 2 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 2a + 0 = 2a$$

$$t = 4 \text{ s} \Rightarrow v_4 = 4a + 0 = 4a$$

$$t = 6 \text{ s} \Rightarrow v_6 = 6a + 0 = 6a$$

اکنون می‌توان سرعت متوسط متحرک را در ۲ ثانیه اول و ۲ ثانیه سوم حرکت به دست آورد و در پایان خواسته تست را محاسبه نمود:

$$v_{av(0,2)} = \frac{v_0 + v_2}{2} = \frac{0 + 2a}{2} = a$$

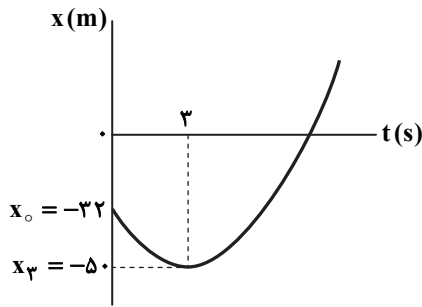
$$v_{av(2,4)} = \frac{v_2 + v_4}{2} = \frac{2a + 4a}{2} = 3a$$

$$\frac{v_{av(2,4)}}{v_{av(0,2)}} = \frac{3a}{a} = 3$$

۴۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

با توجه به نمودار زیر، سرعت متوسط متحرک را در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 3$ s به دست می آوریم:



$$v_{av(0,3)} = \frac{x_3 - x_0}{t_3 - t_0} = \frac{-50 - (-32)}{3 - 0} = -\frac{18}{3} = -6 \frac{m}{s}$$

از طرفی چون حرکت از نوع شتاب دار است، داریم:

$$-6 = \frac{v_0 + 0}{2} \Rightarrow v_0 = -12 \frac{m}{s}$$

شتاب متحرک، ثابت و برابر شتاب متوسط در هر بازه زمانی دلخواه، مثلاً بازه $t = 0$ تا $t = 3$ s است؛ بنابراین:

$$a = a_{av(0,3)} = \frac{v_3 - v_0}{t_3 - t_0} = \frac{0 - (-12)}{3 - 0} = \frac{12}{3} = 4 \frac{m}{s^2}$$

اکنون می توان، معادله مکان- زمان متحرک را به دست آورد:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(4)t^2 - 12t - 32 \Rightarrow x = 2t^2 - 12t - 32$$

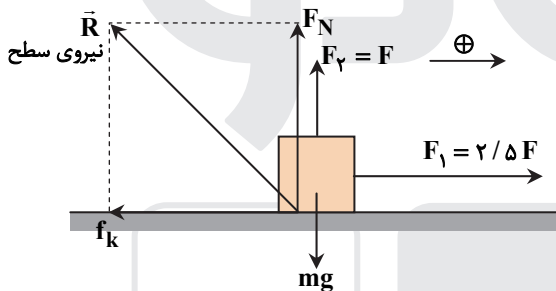
و در پایان برای محاسبه لحظه ای که متحرک از مبدأ مکان عبور می کند، داریم:

$$x = 0 \Rightarrow 2t^2 - 12t - 32 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 8s \checkmark \\ t = -2s \times \end{cases}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۴۸- پاسخ: گزینه ۴

در ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و سپس قانون دوم نیوتون را در دو راستای افقی و عمودی می نویسیم:



$$\begin{aligned} F_{net,x} &= ma \Rightarrow F - f_k = ma \\ &\Rightarrow 2/5F - \mu_k F_N = ma \\ &\Rightarrow 2/5F - 0/5F_N = 2a \quad (1) \text{ رابطه} \\ F_{net,y} &= 0 \Rightarrow F_N + F_y - mg = 0 \\ &\Rightarrow F_N + F - 3 \times 10 = 0 \\ &\Rightarrow F_N = 30 - F \quad (2) \text{ رابطه} \end{aligned}$$

از طرف سطح بر جسم دو نیروی $\vec{f}_k$ و $\vec{F}_N$ وارد می شود که براین دو نیرو برابر $\vec{R}$ است، بنابراین:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{F_N^2 + f_k^2} = \sqrt{F_N^2 + (\mu_k F_N)^2} = \sqrt{1 + \mu_k^2} F_N \Rightarrow 10\sqrt{5} = \sqrt{1 + (0/5)^2} F_N \Rightarrow 10\sqrt{5} = \sqrt{1/25} F_N \\ &\Rightarrow 10\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} F_N \Rightarrow 10\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} F_N \Rightarrow F_N = 20N \xrightarrow{\text{رابطه (2)}} 30 - F = 20 \Rightarrow F = 10N \end{aligned}$$

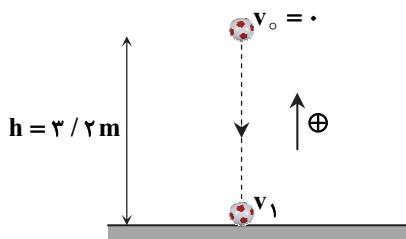
و در پایان با استفاده از رابطه (۱)، شتاب حرکت جسم را به دست می آوریم:

$$2/5F - 0/5F_N = 2a \Rightarrow 2/5 \times 10 - 0/5 \times 20 = 2a \Rightarrow 25 - 10 = 2a \Rightarrow a = \frac{15}{2} = 7.5 \frac{m}{s^2}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۴۹- پاسخ: گزینه ۴

در ابتدا تندی توپ قبل از برخورد به زمین را محاسبه می کنیم:



$$\begin{aligned} v_1^2 - v_0^2 &= 2gh \\ &\Rightarrow v_1^2 - 0 = 2 \times 10 \times 3/2 \\ &\Rightarrow v_1^2 = 64 \Rightarrow v_1 = 8 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

و در ادامه چون تندی توپ پس از برخورد به زمین $v_2 = 6 \frac{m}{s}$ می شود، نیروی خالص متوسط وارد بر توپ در مدت برخورد برابر است با:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t} = m \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = 0.8 \frac{6 - (-8)}{0.04} = \frac{0.8 \times 14}{0.04} = 20 \times 14 = 280N$$

۵۰- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

اندازه نیروی مرکزگرای متحرک A، ۴ برابر اندازه نیروی مرکزگرای متحرک B است، بنابراین:

$$F_A = 4F_B \Rightarrow \frac{m_A v_A^2}{r_A} = 4 \frac{m_B v_B^2}{r_B} \Rightarrow \frac{m_A v_A^2}{r} = \frac{4 m_B v_B^2}{2r} \Rightarrow m_A v_A^2 = 2 m_B v_B^2 \Rightarrow \frac{v_A^2}{v_B^2} = 2 \frac{m_B}{m_A} \quad (1) \text{ رابطه}$$

نسبت انرژی جنبشی متحرک A به انرژی جنبشی متحرک B برابر است با:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \frac{K_A}{K_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{v_A^2}{v_B^2} \xrightarrow{\text{رابطه (1)}} \frac{K_A}{K_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{2 m_B}{m_A} = 1 \times 2 = 2$$

۵۱- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

در ابتدا دامنه نوسان و بسامد زاویه‌ای نوسانگر را به دست آورده و سپس با استفاده از آن‌ها، انرژی مکانیکی و تندی بیشینه نوسانگر را محاسبه می‌کنیم:

$$2A = 10 \text{ cm} \Rightarrow A = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40}{0.1}} = \sqrt{400} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \times 40 \times (0.05)^2 = \frac{1}{2} \times 40 \times 25 \times 10^{-4} = 0.5 \text{ J} = 50 \text{ mJ}$$

$$v_{\max} = A\omega = 0.05 \times 20 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

سپس انرژی جنبشی نوسانگر را در لحظه‌ای که تندی نوسانگر به مقدار $20 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ کمتر از تندی بیشینه نوسانگر است، محاسبه می‌کنیم:

$$v = v_{\max} - 0.2 = 1 - 0.2 = 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times (0.8)^2 = 0.032 \text{ J} = 32 \text{ mJ}$$

و در پایان، محاسبه خواسته تست:

$$E = K + U \Rightarrow 50 = 32 + U \Rightarrow U = 18 \text{ mJ}$$

۵۲- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

مطابق شکل زیر، شخص در نقطه A به فاصله ۳۰ متری از بلندگوی S قرار دارد. چنانچه شخص x متر دیگر از بلندگو دور شود و در نقطه B قرار گیرد، صدای بلندگو را ۱۲ dB آهسته‌تر از نقطه A می‌شنود، بنابراین:

$$\beta_A - \beta_B = 12 \text{ dB} \Rightarrow 10 \log \frac{I_A}{I_B} = 12 \xrightarrow{(I \propto \frac{1}{r^2})} 10 \log \left(\frac{r_B}{r_A} \right)^2 = 12$$

$$2 \log \frac{r_B}{r_A} = 12 \Rightarrow \log \frac{r_B}{r_A} = 6 = 2 \times 3 = 2 \log 10 = \log 100$$

$$\Rightarrow \frac{r_B}{r_A} = 100 \Rightarrow \frac{30 + x}{30} = 100 \Rightarrow 30 + x = 3000 \Rightarrow x = 2970 \text{ m}$$

۵۳- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

جبهه‌های موج در سمت ناظر (۲) متراکم‌تر از سمت ناظر (۱) است، بنابراین:

$$\lambda_2 < \lambda_1$$

از طرفی چون سرعت انتشار صوت در محیط ثابت است، با توجه به رابطه بالا، داریم:

$$\lambda_2 < \lambda_1 \Rightarrow \frac{v}{f_2} < \frac{v}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{f_2} < \frac{1}{f_1} \Rightarrow f_1 < f_2$$

۵۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۴)

با توجه به شکل داده‌شده، در صورت تست، بخش مربعی تپ زودتر از بخش مثلثی آن به دیوار رسیده و بنابراین زودتر بازتاب می‌شود و در نتیجه در تپ بازتاب در سمت چپ آن قرار می‌گیرد؛ بنابراین یکی از گزینه‌های ۱ یا ۲ درست است. از طرفی در شکل داده‌شده در صورت تست، بخش مربعی تپ پایین‌تر از نقطه تعادل قرار دارد و بنابراین هنگامی که به دیوار می‌رسد، نیروی رو به پایینی به دیوار وارد می‌کند و مطابق قانون سوم نیوتون، دیوار نیز نیرویی در خلاف جهت و در نتیجه رو به بالا بر طناب وارد می‌کند. همین موضوع در مورد بخش مثلثی تپ نیز برقرار است و بنابراین گزینه ۱ درست است.

۵۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

پرتو نور هنگامی که از محیط (۱) به محیط (۲) وارد می‌شود، به خط عمود نزدیک می‌شود، بنابراین:

$$D_1 = \theta_{i_1} - \theta_{r_1} \Rightarrow 23^\circ = 53^\circ - \theta_{r_1} \Rightarrow \theta_{r_1} = 30^\circ$$

$$\theta_{i_2} = \theta_{r_1} \Rightarrow \theta_{i_2} = 30^\circ$$

پرتو نور هنگامی که از محیط (۲) به محیط (۳) وارد می‌شود، از خط عمود دور می‌شود؛ بنابراین:

$$D_2 = \theta_{r_2} - \theta_{i_2} \Rightarrow 7^\circ = \theta_{r_2} - 30^\circ \Rightarrow \theta_{r_2} = 37^\circ$$

اکنون با نوشتن قانون شکست اسنل برای حالتی که نور از محیط (۱) وارد محیط (۲) می‌شود و همچنین برای حالتی که نور از محیط (۲) به محیط (۳) وارد می‌شود، داریم:

$$\frac{\sin \theta_{i_1}}{\sin \theta_{r_1}} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\sin 53^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{n_2}{1} \Rightarrow \frac{0.8}{0.5} = n_2 \Rightarrow n_2 = 1.6$$

$$\frac{\sin \theta_{i_2}}{\sin \theta_{r_2}} = \frac{n_3}{n_2} \Rightarrow \frac{\sin 30^\circ}{\sin 37^\circ} = \frac{n_3}{1.6} \Rightarrow \frac{0.5}{0.6} = \frac{n_3}{1.6} \Rightarrow n_3 = \frac{0.8}{0.6} = \frac{4}{3}$$

۵۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

طول موج نور تابیده‌شده به سطح فلز $\frac{1}{4}$ برابر طول موج آستانه فلز است، بنابراین:

$$\lambda = \frac{1}{4} \lambda_0 \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{4} \xrightarrow{(\lambda = \frac{c}{f})} \frac{f_0}{f} = \frac{1}{4} \Rightarrow f = 4f_0 \quad (۱) \text{ رابطه}$$

بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های خارج‌شده از سطح فلز ۶ eV است؛ پس:

$$K_{\max} = hf - hf_0 \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} K_{\max} = 4hf_0 - hf_0 = 3hf_0 \Rightarrow 6 = 3 \times (4 \times 10^{-15}) f_0$$

$$\Rightarrow f_0 = \frac{6}{12 \times 10^{-15}} = 0.5 \times 10^{15} \text{ Hz} = 500 \times 10^{12} \text{ Hz} = 500 \text{ THz}$$

۵۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۵)

در ابتدا شماره مدارهایی که الکترون بین آن‌ها جابه‌جا شده است را به دست می‌آوریم:

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2} \Rightarrow -0.4 E_R = -\frac{E_R}{n^2} \Rightarrow n^2 = \frac{1}{0.4} = 2.5 \Rightarrow n = 5$$

$$r_{n'} = n'^2 a_0 \Rightarrow 4a_0 = n'^2 a_0 \Rightarrow n'^2 = 4 \Rightarrow n' = 2$$

سپس طول موج فوتون خارج‌شده از اتم هیدروژن را محاسبه می‌کنیم:

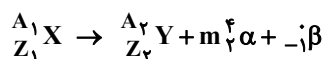
$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{25} \right) = \frac{R \times 21}{100}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{100}{21R} = \frac{100}{21 \times 0.01} = \frac{10^4}{21} \text{ nm} = \frac{10^{-5}}{21} \text{ m} = \frac{10}{21} \mu\text{m}$$

۵۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

در ابتدا واکنش پرتوزایی هسته را با توجه به داده‌های تست، می‌نویسیم:



سپس قانون بقای بار و جرم را برای واکنش بالا نوشته و در ادامه روابط به دست آمده را از هم کم می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_2 + 4m \\ Z_1 &= Z_2 + 2m - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_1 - Z_1 = A_2 - Z_2 + 2m + 1 \xrightarrow{(N=A-Z)} N_1 = N_2 + 2m + 1$$

$$\Rightarrow N_1 - N_2 = 2m + 1$$

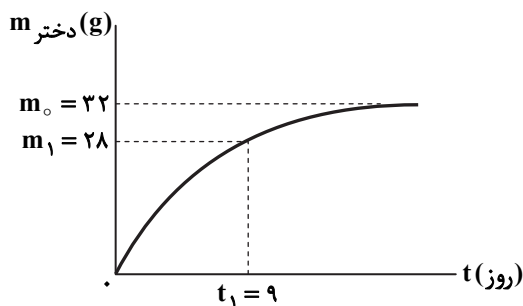
$$\Rightarrow 7 = 2m + 1 \Rightarrow m = 3$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

۵۹- پاسخ: گزینه ۱

جرم هسته‌های دختر همان جرم هسته‌های واپاشیده شده است، بنابراین:

$$m_{\text{دختر}} = \Delta m = m_0 - m = m_0 - \frac{m_0}{2^n} = m_0 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$



با توجه به نمودار، پس از گذشت ۹ روز، جرم هسته‌های دختر برابر ۲۸ g می‌شود، بنابراین:

$$m_1 = m_0 \left(1 - \frac{1}{2^{n_1}}\right) \Rightarrow 28 = 32 \left(1 - \frac{1}{2^{n_1}}\right) \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^{n_1}} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{1}{2^{n_1}} = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^{n_1} = 8 = 2^3 \Rightarrow n_1 = 3 \Rightarrow \frac{t_1}{T} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{9}{T} = 3 \Rightarrow T = 3 \text{ روز}$$

جرم هسته‌های فعال باقی‌مانده پس از گذشت ۱۸ روز برابر است با:

$$n_2 = \frac{t_2}{T} = \frac{18}{3} = 6$$

$$m_2 = \frac{m_0}{2^{n_2}} = \frac{32}{2^6} = \frac{32}{64} = 0.5 \text{ g}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۶۰- پاسخ: گزینه ۴

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow \frac{120 \cdot L}{\text{min}} = A_2 v_2 \Rightarrow \frac{120 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{60 \cdot s} = (5 \times 10^{-4}) v_2 \Rightarrow v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۶۱- پاسخ: گزینه ۲

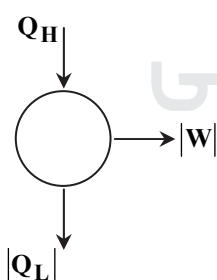
نادرستی گزینه ۱: در فرایند بی‌دررو، گرمای مبادله شده صفر است.

درستی گزینه ۲:

$$\begin{cases} P_{\text{ثابت}} V = nRT \xrightarrow{V \uparrow} T \uparrow \Rightarrow \Delta U > 0 \\ \Delta U = Q + W \xrightarrow{\Delta U > 0, W < 0} Q > 0, |Q| > |W| \Rightarrow \Delta U < Q \end{cases}$$

نادرستی گزینه ۳: در فرایند ضربه، پیستون جابه‌جا می‌شود و با انجام کار همراه است.

نادرستی گزینه ۴:



$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} = \frac{Q_H - |Q_L|}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H}$$

$$Q_H = |W| + |Q_L| = \frac{5}{3} |Q_L| + |Q_L| = \frac{8}{3} |Q_L|$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} = 62.5\%$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

۶۲- پاسخ: گزینه ۱

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_f = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) \Rightarrow -mgh + W_f = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2)$$

$$\Rightarrow -0.1 \times 10 \times 0.2 + W_f = \frac{1}{2} \times 0.1 (25 - 225) = -10 \Rightarrow W_f = -10 + 0.2 = -9.8 \text{ J}$$

$$\Rightarrow Q = |W_f| = 9.8 \text{ J}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۶۳- پاسخ: گزینه ۴

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \beta \Delta \theta} = \rho_1 (1 - \beta \Delta \theta) = \rho_1 - \rho_1 \beta \Delta \theta \Rightarrow \Delta \rho = \rho_2 - \rho_1 = -\rho_1 \beta \Delta \theta \Rightarrow +0.02 \rho_1 = -\rho_1 \beta \Delta \theta$$

$$\Rightarrow 2 \times 10^{-2} = -5 \times 10^{-4} \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = -40 = \theta_2 - 52 \Rightarrow \theta_2 = 12^\circ \text{C} \Rightarrow T_2 = 273 + 12 = 285 \text{ K}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

۶۴- پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{P_1 V}{T_1} = n_1 R \Rightarrow \frac{2 \times 10^5 \times V}{(327 + 273)} = 2 \times \frac{25}{3}$$

$$\Rightarrow 2 \times 10^5 V = 10^4 \Rightarrow V = 5 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$n' = \frac{m}{M} = \frac{80}{32} = 2.5 \text{ mol}$$

$$n_2 = 2 + 2.5 = 4.5 \text{ mol}$$

$$\frac{P_2 V}{T_2} = n_2 R \Rightarrow \frac{5 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-2}}{T_2} = 4.5 \times \frac{25}{3} \Rightarrow T_2 = \frac{25 \times 3 \times 10^3}{25 \times 4.5} = \frac{2000}{3} \text{ K}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۶۵- پاسخ: گزینه ۳

$$\Delta U = \Delta U_{\text{چرخه}} = \Delta U_{\text{بی‌دررو}} + \Delta U_{\text{هم‌فشار}} + \Delta U_{\text{هم‌دم}} = 0 \Rightarrow W_{\text{بی‌دررو}} + Q_{\text{هم‌فشار}} + W_{\text{هم‌فشار}} = 0$$

در تراکم هم‌فشار کار انجام‌شده روی گاز مثبت و گاز گرما از دست می‌دهد ($Q = -1000 \text{ J}$).

$$W_{\text{هم‌فشار}} = +S = 2 \times 10^5 \times (4 - 2) \times 10^{-3} = 400 \text{ J}$$

$$W_{\text{بی‌دررو}} - 1000 + 400 = 0 \Rightarrow W_{\text{بی‌دررو}} = 600 \text{ J}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۶۶- پاسخ: گزینه ۱

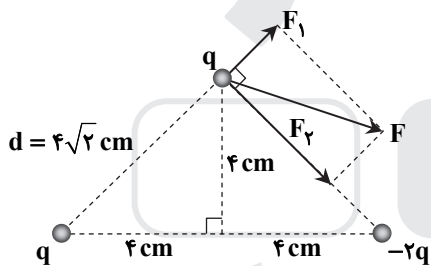
$$\Delta q = ne = 5 \times 10^7 \times (-1.6 \times 10^{-19}) = -8 \times 10^{-12} = -8 \text{ pC}$$

$$q_2 = q_1 + \Delta q = -q_1 \Rightarrow 2q_1 = -\Delta q = 8 \text{ pC} \Rightarrow q_1 = 4 \text{ pC}$$

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{A} = \frac{4 \text{ pC}}{4\pi R^2} = \frac{1}{3 \times \frac{25}{9}} = \frac{3}{25} = 0.12 \frac{\text{pC}}{\text{cm}^2}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۶۷- پاسخ: گزینه ۳



$$F_1 = \frac{kq^2}{d^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 16 \times 10^{-12}}{(4\sqrt{2} \times 10^{-2})^2} = 45 \text{ N}$$

$$F_2 = \frac{k \times 2q^2}{d^2} = 45 \times 2 = 90 \text{ N}$$

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{45^2 + (2 \times 45)^2}$$

$$\Rightarrow F = \sqrt{45^2 (1 + 4)} = 45\sqrt{5} \text{ N}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۶۸- پاسخ: گزینه ۴

پتانسیل الکتریکی نقاط در جابه‌جایی در جهت میدان، کاهش می‌یابد.

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow -20 = \frac{\Delta U}{-40 \times 10^{-6}} \Rightarrow \Delta U = 8 \times 10^{-4} = 0.8 \text{ mJ}$$

$$W_{F \text{ میدان}} = -\Delta U = -0.8 \text{ mJ}$$

$$W_t = W_{F \text{ میدان}} + W_{\text{خارجی}} = \Delta K \Rightarrow -0.8 \text{ mJ} + W_{\text{خارجی}} = 0 \Rightarrow W_{F \text{ خارجی}} = +0.8 \text{ mJ}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۹- پاسخ: گزینه ۱

$$I_{\text{کلید قطع}} = \frac{\mathcal{E}}{2R + r}$$

$$I'_{\text{کلید وصل}} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{3}{2}R + r} \xrightarrow{\text{جریان عبوری از آمپرمنج}} \frac{I'}{2} = \frac{\mathcal{E}}{2R + 2r}$$

$$\frac{I'}{2} = \frac{\mathcal{E}}{2R + 2r} = \frac{2R + r}{2R + 2r} = \frac{5}{8} \Rightarrow 16R + 8r = 15R + 10r \Rightarrow R = 2r \Rightarrow \frac{R}{r} = 2$$

۷۰- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)

با افزایش R_p ، مقاومت معادل مدار افزایش و در نتیجه جریان کل مدار کاهش می‌یابد:

$$R_p \uparrow \Rightarrow R_{eq} \uparrow \Rightarrow \downarrow I = \frac{\mathcal{E}}{\uparrow R_{eq} + r}$$

$$V_{مولد} = V_v \uparrow = \mathcal{E} - I \downarrow r$$

ولتاژ دو سر مولد برابر با مجموع ولتاژ دو سر R_1 و مقاومت‌های R_p و R_3 است:

$$\uparrow V_{مولد} = \downarrow V_{R_1} + V_{R_p} \uparrow$$

$$V_{R_p} \uparrow = I_3 \underbrace{R_3}_{\text{ثابت}} \Rightarrow I_3 \uparrow$$

۷۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

$$V_A - 4 - 0.5I - 4.5I - I + 16 = V_A \Rightarrow 12 = 6I \Rightarrow I = 2A$$

$$\Delta V_{AB} = \mathcal{E}_r + Ir_p = 4 + 0.5 \times 2 = 5V$$

$$P_{AB \text{ مصرفی}} = \Delta V_{AB} \times I = 5 \times 2 = 10W$$

$$W_{AB} = P_{AB} \times t = 10 \times 5 = 50J$$

۷۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)

$$\frac{I_1=I_3}{P=RI^2} \rightarrow P_r = \frac{1}{r} P_1 = \frac{1}{r} (120) = 60W$$

$$\frac{V_{r,3}=V_f}{P=\frac{V^2}{R}} \rightarrow P_f = 2P_{(r,3)} = 2(60 + 120) = 360W$$

$$R_{r,3,f} = \frac{(6+12)(9)}{(6+12)+9} = \frac{18 \times 9}{18+9} = 6\Omega$$

$$\frac{I_1=I_{r,3,f}}{P=RI^2} \rightarrow P_1 = \frac{1}{r} P_{r,3,f} = \frac{1}{r} (540) = 270W$$

$$P_{کل} = 270 + 540 = 810W$$

۷۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}) \times (100) \times (2)}{2\pi} = 4 \times 10^{-5} T$$

$$F = |q|vB \sin \theta \Rightarrow F = (5 \times 10^{-6}) \times (10^6) \times (4 \times 10^{-5}) \times \sin 90^\circ = 2 \times 10^{-4} N = 0.2 \times 10^{-3} N = 0.2 mN$$

۷۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

زمان لازم برای ورود کامل قاب به میدان یا خروج کامل از آن:

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow \Delta = \frac{0.1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{50} s$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta BA}{\Delta t} = \frac{(\frac{1}{10}) \times (100 \times 10^{-4})}{(\frac{2}{100})} = \frac{1}{20} V$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{R} \Rightarrow \bar{I} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5} A = 0.2A$$

طبق قانون لنز، هنگام خروج قاب از میدان، جهت جریان القایی باید ساعتگرد باشد تا با ایجاد میدان القایی درون سو (⊗)، با کاهش میدان B مخالفت کند.

۷۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

$$P_{هر مقاومت} = 20 = \frac{V^2}{80} \Rightarrow V = 40V$$

$$V_r = 2V_1 = 80V$$

$$\frac{V_r}{V_1} = \frac{N_r}{N_1} \Rightarrow \frac{80}{200} = \frac{N_r}{N_1} = 0.4 \Rightarrow \frac{N_1}{N_r} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

شیمی

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۶- پاسخ: گزینه ۱

عبارت اول: درست

$${}_{26}^{56}\text{X}^{2+} \Rightarrow \begin{cases} n = 56 - 26 = 30 \\ e = 26 - 2 = 24 \end{cases} \Rightarrow 30 - 24 = 6$$

$$\frac{n-e}{e} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

عبارت دوم: درست

$$M = \frac{(63 \times 3) + (65 \times 1)}{4} = 63.5 \text{ amu}$$

عبارت سوم: درست

$${}_{17}^{35}\text{Cl}^{-} : \begin{cases} e = 17 + 1 = 18 \\ n = 35 - 17 = 18 \end{cases}$$

عبارت چهارم: درست

$${}_{20}^{40}\text{Ca} : \begin{cases} n = 40 - 20 = 20 \\ e = 20 \\ p = 20 \end{cases}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۷- پاسخ: گزینه ۴

ایزوتوپ اول با X و ایزوتوپ دوم را با Y نشان می‌دهیم:

$$\frac{A}{Z}\text{X} \quad \frac{A+1}{Z}\text{Y}$$

فراوانی: ۷۰٪ ۳۰٪

$$24/3 = \frac{[(A \times 70) + [(A+1) \times 30]]}{100} \Rightarrow A = 24 \Rightarrow A+1 = 25$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل‌های ۱ تا ۳)

۷۸- پاسخ: گزینه ۳

رنگ شعله نمک‌های مس (II) و فلز مس سبزرنگ هستند. رنگ شعله نمک‌های لیتیم (Li^{+}) و فلز لیتیم سرخ رنگ هستند. رنگ شعله نمک‌های سدیم (Na^{+}) و فلز سدیم زرد رنگ هستند.

■ تنها مس (II) کلرید (CuCl_2) رنگ شعله سبز دارد. (۱ مورد)

■ لیتیم نیترات (LiNO_3) و لیتیم سولفات (Li_2SO_4) هم رنگ شعله سرخ دارند. (۲ مورد)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۹- پاسخ: گزینه ۴

حداکثر گنجایش الکترون زیرلایه‌ها را از رابطه $(4l+2)$ می‌توان به‌دست آورد:

مورد اول:

$$l=3 \rightarrow \text{زیرلایه } f \rightarrow \text{گنجایش ۱۴ الکترون}$$

$$l=4 \rightarrow (4 \times 4) + 2 = 18 \text{ الکترون}$$

$$18 - 14 = 4 \text{ الکترون}$$

مورد دوم: آرایش الکترونی باید به $4p^1$ ختم شود که در مورد عنصر ${}_{31}\text{Ga}$ به‌صورت زیر است:

$${}_{31}\text{Ga} : [{}_{18}\text{Ar}] 3d^1 4s^2 4p^1$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

۸۰- پاسخ: گزینه ۱

عبارت اول: درست

$$\text{O}_2 > \text{Ar} > \text{He}$$

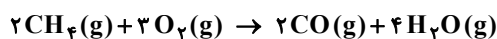
$$-182 \quad -186 \quad -269$$

عبارت دوم و چهارم هم درست هستند.

عبارت سوم نادرست است. مقدار هلیوم در منابع زمینی از هواکره بیشتر است.

۸۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)



$$x \text{ L CO} = 48 \text{ g CH}_4 \times \frac{1 \text{ mol CH}_4}{16 \text{ g CH}_4} \times \frac{2 \text{ mol CO}}{2 \text{ mol CH}_4} \times \frac{28 \text{ g CO}}{1 \text{ mol CO}} \times \frac{1 \text{ L CO}}{1/2 \text{ g CO}} = 70 \text{ L CO}_2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۲- پاسخ: گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

(۱) NH_4Cl (نسبت شمار کاتیون به آنیون ۱ به ۱) - K_2CO_3 (نسبت شمار آنیون به کاتیون ۱ به ۲)(۲) $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ (نسبت شمار کاتیون به آنیون ۲ به ۱) - $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$ (نسبت شمار آنیون به کاتیون ۲ به ۱)(۳) $\text{Al}_2(\text{CO}_3)_3$ (نسبت شمار کاتیون به آنیون ۲ به ۳) - NH_4OH (نسبت شمار آنیون به کاتیون ۱ به ۱)(۴) Li_2SO_4 (نسبت شمار کاتیون به آنیون ۲ به ۱) - MgCO_3 (نسبت شمار آنیون به کاتیون ۱ به ۱)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۳- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا جرم کلسیم کلرید حل شده را محاسبه می‌کنیم:

$$500 \text{ mL} \times \frac{0.08 \text{ mol Cl}^-}{1000 \text{ mL}} \times \frac{1 \text{ mol CaCl}_2}{2 \text{ mol Cl}^-} \times \frac{111 \text{ g CaCl}_2}{1 \text{ mol CaCl}_2} = 2/22 \text{ g CaCl}_2$$

با توجه به چگالی محلول، حجم آن را به جرم تبدیل می‌کنیم و سپس درصد جرمی حل‌شونده را محاسبه می‌کنیم:

$$500 \text{ mL} \times \frac{1/11 \text{ g}}{1 \text{ mL}} = 555 \text{ g}$$

$$\text{درصد جرمی} = \frac{2/22}{555} \times 100 = 0.4\%$$

راه حل دوم:

$$[\text{CaCl}_2] = \frac{[\text{Cl}^-]}{2} = \frac{0.4}{2} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$M = \frac{10ad}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow 0.4 = \frac{10 \times a \times 1/1}{111} \Rightarrow a = 0.4\%$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۴- پاسخ: گزینه ۴

راه حل اول:

جرمی از ماده A که به ۴۰ گرم آب اضافه شده است را x گرم در نظر بگیریم و با توجه به رابطه محاسبه درصد جرمی مقدار x را می‌توان محاسبه کرد:

$$\frac{x-2}{40+(x-2)} \times 100 = 20 \Rightarrow \frac{x-2}{38+x} = 0.2 \Rightarrow x = 12 \text{ g}$$

با توجه به درصد جرمی A در محلول نهایی می‌توان جرم آن را محاسبه کرد:

$$\frac{12}{m} \times 100 = 20 \Rightarrow m = 60 \text{ g}$$

راه حل دوم:

$$\text{محلول‌های سیر شده: } \frac{x-2}{40} = \frac{x}{m+40} = \frac{20}{80} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ m = 8 \end{cases}$$

$$\text{محلول نهایی} = x + 40 + m = 60$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۵- پاسخ: گزینه ۱

فقط عبارت اول درست است؛ زیرا H_2O توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را دارد.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت دوم: در شرایط معین، انحلال‌پذیری کربن دی‌اکسید در مقایسه با نیتروژن مونوکسید در آب بیشتر است. (به دلیل انجام واکنش با آب)

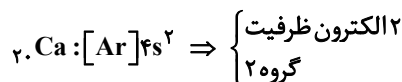
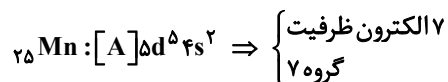
عبارت سوم: قانون هنری تأثیر فشار گاز بر انحلال‌پذیری گازها در آب را در دمایی معین نشان می‌دهد.

عبارت چهارم: مقایسه $\text{HF} > \text{HBr} > \text{HCl}$ را می‌توان به نقطه جوش این مواد در فشار ۱ atm نسبت داد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

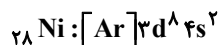
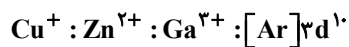
۸۶- پاسخ: گزینه ۴

عبارت اول: نادرست

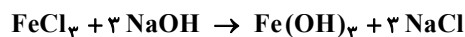
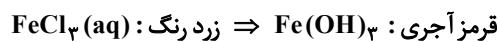


عبارت دوم: نادرست؛ H, C, N, O, F, P, S و Cl (۸ عنصر)

عبارت سوم: نادرست



عبارت چهارم: نادرست



▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

۸۷- پاسخ: گزینه ۴

(۱) درست: A می تواند C باشد.

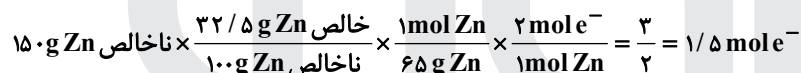
(۲) درست: CuSO_4 : محلول آبی رنگ



یک الکترون با $n=4$ و $l=0$ دارد.

(۳) درست: X_2 برم است و در دمای اتاق مایع است.

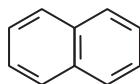
(۴) نادرست



▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

۸۸- پاسخ: گزینه ۳

(۱) درست



دو حلقه

۶ پیوند C-C



یک حلقه

۳ پیوند C-C

(۲) درست

$$\text{درصد کربن در آلکانها} = \frac{12n}{14n+2} \times 100$$

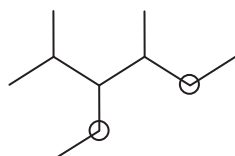
$n \uparrow \Rightarrow \text{درصد کربن} \uparrow$

$$\text{درصد کربن در آلکینها} = \frac{12n}{14n-2} \times 100$$

$n \uparrow \Rightarrow \text{درصد کربن} \downarrow$

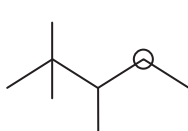
(۳) نادرست (به ترتیب ۲ و ۱ گروه CH_2 دارند).

۳ اتیل-۲،۴ دی متیل هگزان



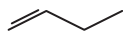
۲ گروه CH_2

۲،۳،۴ تری متیل پنتان



۱ گروه CH_2

(۴) درست: تعداد H و C برابر دارند، پس ایزومر هستند. غیر حلقوی دوگانه بیشتر و یگانه کمتر دارد. مثلاً:



C_4H_6
۲ (C-C)



C_4H_8
۴ (C-C)

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

۸۹- پاسخ: گزینه ۱

براساس قانون هس ΔH واکنش (IV) را حساب می‌کنیم:

$$\Delta H_f = \frac{1}{2} \Delta H_1 + 2 \Delta H_2 - \frac{1}{2} \Delta H_3 = -283 + (-572) + 715 = -140 \text{ kJ}$$

$$-140 = (\Delta H_{C \equiv O} + 2 \Delta H_{H-H}) - (3 \Delta H_{C-H} + \Delta H_{C-O} + \Delta H_{O-H})$$

$$-140 = (\Delta H_{C \equiv O} + 2 \times 436) - (3 \times 415 + 380 + 463)$$

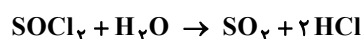
$$-140 = \Delta H_{C \equiv O} + 872 - (1245 + 380 + 463) \Rightarrow \Delta H_{C \equiv O} = 1076 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$$

$$140 \text{ kJ} = 2 \text{ kg} \times 0.7 \frac{\text{J}}{\text{g}^\circ\text{C}} \times \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = 100^\circ\text{C}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

۹۰- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:



عبارت اول: نادرست

$$35/7 - 23/8 = 11/9 \text{ g SOCl}_2$$

$$R_{\text{SOCl}_2} = \frac{11/9 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol SOCl}_2}{119 \text{ g SOCl}_2}}{2 \text{ L} \times 10 \text{ min}} = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{L} \cdot \text{min}}$$

$$R_{\text{HCl}} = 2 R_{\text{SOCl}_2} = 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{L} \cdot \text{min}}$$

عبارت دوم: درست؛ هر دو فراورده هستند و ضریب مولی HCl دو برابر SO_2 است.

عبارت سوم: درست

$$R_{\text{HCl}} \times 10^{-6} < 2 R_{\text{SO}_2}$$

$$\Rightarrow R_{\text{HCl}} < 2 \times 2 / 5 \times 10^{-4} \frac{\text{mol}}{\text{L} \cdot \text{min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \frac{5}{6} \times 10^{-5} \frac{\text{mol}}{\text{L} \cdot \text{s}}$$

$$5 \times 10^{-6} < \frac{5}{6} \times 10^{-5}$$

عبارت چهارم: نادرست؛ شیب SO_2 قرینه شیب H_2O و SOCl_2 است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۱- پاسخ: گزینه ۳

بررسی عبارت «ت»: فرمول استیرین به صورت $(\text{C}_8\text{H}_8)_n$ است، اگر $n = 500$ در نظر گرفته شود، در هر مولکول $500 \times 8 = 4000$ اتم هیدروژن وجود خواهد داشت.

بررسی عبارت‌های نادرست:

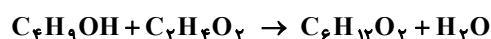
الف) ساختار مولکول برخی از مواد درشت مولکول را می‌توان شمار بسیار زیادی از یک بخش معین (واحد تکرار شونده) در نظر گرفت.

پ) با بررسی ساختار پلی‌اتن می‌توان نتیجه گرفت ترکیبی سیر شده است و تفلون هیدروکربن نیست!

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۲- پاسخ: گزینه ۱

فرمول مولکولی سبک‌ترین الکل یک عاملی که از آن می‌توان محلولی سیر شده در آب تهیه کرد (۱- بوتانول) $\text{C}_4\text{H}_9\text{OH}$ است. در اثر واکنش این الکل با استیک اسید (اتانویک اسید CH_3COOH)، آب و استری به نام بوتیل اتانوات ($\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_2$) حاصل می‌شود.



$$3/7 \text{ g A} \times \frac{1 \text{ mol A}}{74 \text{ g A}} \times \frac{1 \text{ mol E}}{1 \text{ mol A}} \times \frac{116 \text{ g E}}{1 \text{ mol E}} = 5/8 \text{ g E}$$

بررسی گزینه‌های نادرست:

(۲) از اتیل بوتانوات برای تولید شوینده‌هایی با بوی آناناس استفاده می‌شود. (نه بوتیل اتانوات)

(۳) فرمول مولکولی فراورده آلی حاصل از این واکنش $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_2$ است.

(۴) طی این فرایند آب نیز تولید می‌شود که جرم آن (۰/۹ g) حدود ۰/۱۵ برابر جرم فراورده آلی واکنش (۵/۸ g) است.

۹۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

بخشی از ساختار یک پلی آمید نمایش داده شده است که فرمول مولکولی دی آمین سازنده آن $C_7H_8N_2$ و فرمول مولکولی دی اسید سازنده آن $C_8H_6O_4$ است.

بررسی گزینه های نادرست:

(۱) نوعی پلی آمید است که از مخلوط کردن دو ماده (دی آمین و دی اسید) در شرایط مناسب تهیه می شود.

(۲) پلیمری هم خانواده با کولار است که در تهیه آن از یک دی آمین (و یک دی اسید) به عنوان مونومر استفاده می شود.

(۴) از خانواده پلی آمیدها بوده و تجربه نشان می دهد به طور معمول در اثر واکنش با آب به کندی به مونومرهایش تجزیه می شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۴- پاسخ: گزینه ۲

بررسی عبارت های درست:

عبارت اول: با افزایش شمار اتم های کربن، بخش ناقطبی الکل (زنجیره هیدروکربنی) که دارای نیروی وان دروالسی است قوی تر می شود.

عبارت چهارم: ساده ترین کربوکسیلیک اسید CH_3COOH (فورمیک اسید) است و پرکاربردترین کربوکسیلیک اسید C_6H_5COOH (استیک اسید) است.

بررسی عبارت های نادرست:

عبارت دوم: هرچه مولکول الکل شمار اتم های کربن بیشتری داشته باشد، تفاوت انحلال پذیری الکل در آب با انحلال پذیری آلکان هم کربنش در آب کمتر است. (آلکان ها در آب نامحلول هستند).

عبارت سوم: اسیدی که از آبکافت اتیل استات تولید می شود (استیک اسید) از آبکافت اتیل پروپانوات (اسید حاصل از آبکافت: پروپانویک اسید) تولید نمی شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۵- پاسخ: گزینه ۳

(۱) درست: فرمول شیمیایی همگانی صابون های مایع نیتروژن دار با زنجیر آلکیل به صورت $C_nH_{2n+1}COONH_4$ است، پس:



(۲) درست



حالت فیزیکی هر سه فراورده متفاوت است.

(۳) نادرست: رسانایی الکتریکی افزون بر قدرت الکترولیت به غلظت مولی وابسته است و با نداشتن غلظت مولی نمی توان در مورد رسانایی الکتریکی محلول اظهار نظر کرد.

(۴) درست: گل ادریسی در محیط های بازی به رنگ سرخ دیده می شود.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۶- پاسخ: گزینه ۳

الف) درست: زنجیرهای هیدروکربنی سازنده آن دارای شمار اتم های متفاوتی است از این رو در واکنش چربی با محلول سود سوزآور سه نوع صابون جامد به دست می آید.

ب) نادرست: فرمول مولکولی چربی $C_{54}H_{104}O_6$ است.



$$\frac{0.2 \text{ mol}}{1 \text{ mol}} = \frac{? \text{ L}}{54 \times 22.4 \text{ L}} \Rightarrow ? = 241/92$$

پ) نادرست

$$\text{شمار جفت الکترون های پیوندی} = \frac{(54 \times 4) + (104 \times 1) + (6 \times 2)}{2} = 166$$

هر اتم اکسیژن ۲ جفت الکترون ناپیوندی دارد، پس:

$$6 \times 2 = 12$$

$$\frac{166}{12} = 13 \frac{8}{12}$$

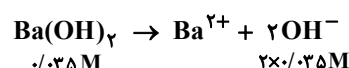
ت) درست: مخلوط آب و چربی و صابون نوعی کلوئید و پایدار است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۷- پاسخ: گزینه ۴

با توجه به معادله یونش درمی یابیم که پرکلریک اسید، اسید قوی است؛ زیرا یونش آن یک طرفه است.

$$pH = -\log 5 \times 10^{-3} = 3 - 0.7 = 2.3$$



$$pOH = -\log 7 \times 10^{-2} = 2 - 0.85 = 1.15 \Rightarrow pH = 14 - 1.15 = 12.85$$

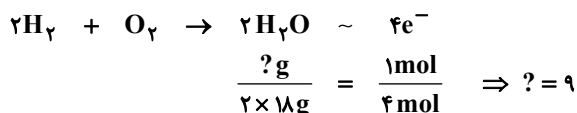
تفاوت pH دو محلول برابر است با:

$$12.85 - 2.3 = 10.55$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۸- پاسخ: گزینه ۳

الف) درست



(ب) درست؛ پتانسیل نیم‌واکنشی آندی برابر صفر است؛ زیرا همان نیم‌واکنش SHE است.

$$emf = E^\circ_{\text{آند}} - E^\circ_{\text{کاتد}}$$

(پ) نادرست؛ جهت حرکت الکترون در هر دو نوع سلول گالوانی و الکترولیتی از آند به کاتد است.

(ت) نادرست؛ در سلول گالوانی کاتیون‌ها پس از مهاجرت به سمت کاتد، مصرف نمی‌شوند ولی در سلول سوختی کاتیون‌های H^+ پس از عبور از غشاء در بخش کاتدی با گاز اکسیژن واکنش می‌دهند.

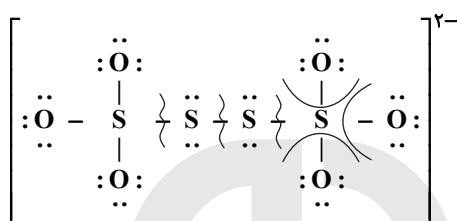
▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۹- پاسخ: گزینه ۳

(۱) درست؛ بار الکتریکی هر دو یون برابر «-۲» است.

(۲) درست

(۳) نادرست

عدد اکسایش اتم S متصل به اتم‌های اکسیژن برابر است با: $6 - 1 = +5$ عدد اکسایش اتم S متصل به اتم S برابر است با: $6 - 6 = 0$

(۴) درست؛ عدد اکسایش اتم‌های S در یون A برابر ۶+ است که برابر با بالاترین عدد اکسایش اتم گوگرد است. از این رو یون A همواره نقش اکسندگی دارد ولی در یون B عدد اکسایش اتم‌های S برابر ۶+ نیست و فاقد این ویژگی است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۲

فرمول شیمیایی همگانی پاک‌کننده‌های غیرصابونی با زنجیر آلکیل به صورت زیر است:



پس عبارت داده‌شده نادرست است.

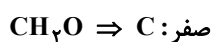
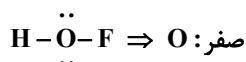
مورد اول: نادرست؛ برای تهیه فلز سدیم نمی‌توان از برقکافت محلول‌های آبی سدیم کلرید استفاده کرد و از سدیم کلرید مذاب استفاده می‌شود.

مورد دوم: نادرست



به‌ازای تولید هر مول Al، سه مول الکترون مبادله می‌شود.

مورد سوم: درست



مورد چهارم: نادرست؛ قدرت کاهندگی فلزی مانند Al (دسته p) از قدرت کاهندگی بسیاری از فلزهای دسته d بیشتر است، ولی قدرت کاهندگی فلزی مانند قلع از قدرت کاهندگی برخی از فلزهای دسته d کمتر است.

پس تنها مورد سوم از نظر درستی یا نادرستی با عبارت داده‌شده متفاوت است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۱

با توجه به چگالی آب دریا که برابر $1g \cdot mL^{-1}$ است، پس:

$$2500ppm = \frac{2500mg \text{ منیزیم}}{1L \text{ آب دریا}}$$

$$\frac{2/5gMg^{2+}}{1L} = \frac{1000gMg^{2+}}{?L} \Rightarrow ? = 400L$$

با توجه به اینکه بازده درصدی برقکافت برابر ۸۰ درصد است، پس به مقدار بیشتری از آب دریا نیاز است:

$$400 \times \frac{100}{80} = 500$$

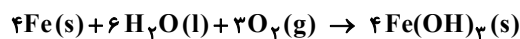
۱۰۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

(۱) نادرست؛ در محیط اسیدی پتانسیل کاهش اکسیژن مثبت تر می شود ولی پتانسیل کاهش فلز آهن تغییر نمی کند.

(۲) درست

(۳) نادرست؛ مجموع ضرایب برابر ۱۷ است.



(۴) نادرست؛ مهم ترین روش صنعتی برای جلوگیری از خوردگی آهن، حفاظت کاتدی یا متصل کردن فلزهایی با پتانسیل منفی تر از پتانسیل آهن به فلز آهن است.

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۴)

عبارت های «اول» و «چهارم» نادرست هستند.

عبارت اول: از آمونیاک در مبدل خودروهای دیزلی استفاده می شود.

عبارت چهارم: کاتالیزگر ΔH واکنش را تغییر نمی دهد.

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

A و C جامد هستند و K فقط به [B] مرتبط است: $K = \frac{1}{[B]}$ پس همه B باید مصرف شود. در نتیجه باید مقدار B اضافه شده کمتر از

مقدار A موجود باشد تا مجدداً تعادل ایجاد شود؛ بنابراین A به طور کامل مصرف می شود و تعادل جدیدی ایجاد نمی شود.

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

فقط عبارت «اول» درست است.

عبارت دوم: در اکسایش اتن از KMnO_4 رقیق استفاده می شود.

عبارت سوم: در بازیافت شیمیایی PET از متانول استفاده می شود.

عبارت چهارم: به صرفه بودن از دیدگاه اتمی به معنی تبدیل بیشتر اتم ها به فرآورده های سودمند است.

پیش‌دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی